



MINISTERUL EDUCAȚIEI

COLEGIUL NAȚIONAL "MIHAIL SADOVEANU" PAȘCANI

Municipiul Pașcani, Strada Sportului nr. 4, Județul Iași, cod 705200

Telefon / Fax: 0232 762637; contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro

CONCURSUL SPERANTE OLIMPICE, 12 noiembrie 2022

Subiecte

Clasa a 8 a

1. Fie multimea $A = \{(a - \sqrt{b})^2 \mid 1 \leq a \leq 25; 1 \leq b \leq 25; a, b \in \mathbb{N} \mid x \in A\}$.

a) Stabiliți dacă $361 \in A$.

b) Determinați cardinalul mulțimii $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in A\}$.

2. a) Fie $a, b \in (0, +\infty)$ dacă $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ arătați că $a = b$.

b) Aflați numerele reale $a, b \in (0, +\infty)$ știind că $\frac{(a+b)^2}{8888} - \frac{a+b}{2} + 2022 = \sqrt{ab}$.

(Adaptare GM 10/2021)

3. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic și punctele $M \in (AA')$, $N \in (BB')$, $P \in (CC')$ și $Q \in (DD')$. Arătați că dacă punctele M, N, P, Q sunt coplanare atunci $MNPQ$ - paralelogram.

NOTA: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru 2 ore.

Fiecare subiect este punctat de la 1 la 7 puncte.



MINISTERUL EDUCAȚIEI

COLEGIUL NAȚIONAL "MIHAIL SADOVEANU" PAȘCANI

Municipiul Pașcani, Strada Sportului nr. 4, Județul Iași, cod 705200

Telefon / Fax: 0232 762637; contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro

CONCURSUL SPERANTE OLIMPICE, 12 noiembrie 2022

BAREM DE CORECTARE

Clasa a 8 a

1) a) $a=20$

$$b=1 \Rightarrow (a-\sqrt{b})^2 = 19^2 = 361 \quad \dots \dots \dots 1 \text{ p}$$

$$b) \left. \begin{aligned} x &= (a-\sqrt{b})^2 = a^2 + b - 2a\sqrt{b} \\ a, b &\in \mathbb{N} \end{aligned} \right\} x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b \text{ este patrat perfect} \dots \dots \dots 1 \text{ p}$$

$$b \in \{1, 4, 9, 16, 25\} \quad (a-\sqrt{b})^2 \in A_i \quad i=\overline{1,5}$$

$$\left. \begin{array}{lll} b=1 & a=\overline{1,25} & A_1=\{0^2, 1^2, \dots, 24^2\} \\ b=4 & a=\overline{1,25} & A_2=\{0^2, 1^2, \dots, 23^2\} \\ b=9 & a=\overline{1,25} & A_3=\{0^2, 1^2, \dots, 22^2\} \\ b=16 & a=\overline{1,25} & A_4=\{0^2, 1^2, \dots, 21^2\} \\ b=25 & a=\overline{1,25} & A_5=\{0^2, 1^2, \dots, 20^2\} \end{array} \right\} \dots \dots \dots 2 \text{ p}$$

$$\left. \begin{array}{l} B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \\ A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5 \end{array} \right\} \Rightarrow B = A_1 \dots \dots \dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Card } B = 25 \quad \dots \dots \dots 1 \text{ p}$$

Oficiu 1 p

2) a) $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ deduce $a=b$ 2 p

b) $m_a \geq m_g$

$$\frac{(a+b)^2}{8088} + 2022 \geq 2\sqrt{\frac{(a+b)^2}{8088}} \cdot 2022 \quad 1 p$$

$$\frac{(a+b)^2}{8088} - \frac{a+b}{2} + 2022 \geq \frac{a+b}{2} \quad 1 p$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2} \\ \text{Dar } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a=b \quad 1 p$$

Finalizare $a=b=2022$ 1 p

Oficiu 1 p

3) Fie $AC \cap BD = \{O\}$

Luam O' mijlocul segmentului MP

In trapezul MACP OO' – linie mijlocie $\Rightarrow OO' \parallel MA \parallel PC$ 1 p

Luam O'' mijlocul segmentului QN

In trapezul QDBN OO'' – linie mijlocie $\Rightarrow OO'' \parallel QD \parallel NB$ 1 p

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow OO' \parallel OO'' \\ O', O'' \in (MNPQ) \\ OO' \cap OO'' = \{O\} \end{array} \right\} \Rightarrow O' = O'' \quad 2 p$$

$\Rightarrow$ Diagonalele patrulaterului MNPQ se injumataresc.

Deci MNPQ paralelogram 2 p

Oficiu 1 p