

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
SPERANȚE OLIMPICE

9 noiembrie 2024

Clasa a VII a

Subiectul I (7 puncte)

1. Fie numărul rațional $x = (3\sqrt{3} - \sqrt{26})^{100}$.
 - a) Demonstrează că $3\sqrt{3} - \sqrt{26} < \frac{1}{8}$.
 - b) Află primele 90 de zecimale ale numărului x .
2. Fie $a = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$.
 - a) Demonstrează că $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}, \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$.
 - b) Demonstrează că $0,2 < \sqrt{\frac{a}{11}} < 0,3$.

Subiectul II (7 puncte)

Se dau mulțimile:

$$A = \left\{ a_n \mid a_n \in \mathbb{Q}, a_n = \frac{n^2 - n + 4}{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 100 \right\} \text{ și}$$

$$B = \left\{ b_n \mid b_n \in \mathbb{Q}, b_n = \frac{n^2 - n + 6}{n^2 + 2}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 100 \right\}.$$

- a) Află $\text{card } A$ și $\text{card } B$.
- b) Demonstrează că suma $(\text{card } A)^{4k+2} + (\text{card } B)^{4k}$ este divizibilă cu 5, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Subiectul III (7 puncte)

1. Fie triunghiul dreptunghic ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AD \perp BC, D \in BC$ și $(BE$ bisectoarea $\sphericalangle ABC, E \in AC$, iar $AD \cap BE = \{F\}$. Dacă $AG \perp BE, G \in BC$ arătați că $(GA$ este bisectoarea unghiului FGE .
2. Fie triunghiul isoscel ABC cu unghiul $\sphericalangle BCA = 100^\circ$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle CAB$ intersectează BC în D . Arătați că $AB = AD + CD$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru: 120 minute

Timp de acomodare subiect: 30 minute

Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte