



MINISTERUL EDUCAȚIEI

COLEGIUL NAȚIONAL "MIHAIL SADOVEANU" PAȘCANI

Municipiul Pașcani, Strada Sportului nr. 4, Județul Iași, cod 705200

Telefon / Fax: 0232 762637; contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro

CONCURSUL SPERANȚE OLIMPICE, 12 noiembrie 2022

Barem

Clasa a VII a

I.

1. Fiecare fracție este de forma $f = 1 + \frac{1}{n} \in \mathbb{N}$ 1,5p
Deci $n/2021 \Rightarrow n \in \{1; 43; 47; 2021\}$ 0,5p
Cum $n \geq 10 \Rightarrow n \in \{43; 47; 2021\} \Rightarrow f \in \{2; 44; 48\} \Rightarrow \text{card}(A \cap \mathbb{N})$ 1p
2. Avem $b = \frac{1}{a-x_1} + \frac{2}{a-x_2} + \dots + \frac{n}{a-x_n}$; (1) 0,5p
Înmulțim (1) cu $a \Rightarrow a*b = \frac{a}{a-x_1} + \frac{2a}{a-x_2} + \dots + \frac{na}{a-x_n}$, 1,5p
sau $a*b = \frac{a-x_1+x_1}{a-x_1} + \frac{2(a-x_2)+2x_2}{a-x_2} + \dots + \frac{n(a-x_n)+nx_n}{a-x_n} = 1 + 2 + \dots + n + S$ 1p
Obținem $S = a * b - \frac{n(n+1)}{2}$ 1p
Oficiu. 1p

II.

1. Deoarece $(3, 4) = 1$, din $4(a+1) = 3(b+2) \Rightarrow 3/a+1 \Rightarrow$
Valoarea comună a fracțiilor din enunț este nr. întreg 1,5p
Deducem $c + 3/5 \Rightarrow c + 3 \in \{-5; -1; 1; 5\} \Rightarrow c \in \{-8; -4; -2; 2\}$ 1p
Pentru $c = -8 \Rightarrow a = -4$ și $b = -6$
Pentru $c = -4 \Rightarrow a = -16$ și $b = -22$
Pentru $c = -2 \Rightarrow a = 14$ și $b = 18$
Pentru $c = 2 \Rightarrow a = b = 2$ 1p
2. Avem $xy + x + y + 1 < 0 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) < 0$ 0,5p
Caz I $\begin{cases} x+1 < 0 \\ y+1 > 0 \end{cases}$ sau Caz II $\begin{cases} x+1 > 0 \\ y+1 < 0 \end{cases}$ 0,5p
Din Caz I $\Rightarrow \min(x^2 + y^2) = 5$ pt. $x = -2$ și $y = 1$ 1p
Din Caz II $\Rightarrow \min(x^2 + y^2) = 5$ pt. $x = 1$ și $y = -2$ 1p
Oficiu 1p

III.

1. Din inegalitatea lungimilor laturilor unui triunghi avem
 $a + b > c$ 0,5p
 $2(a+b) > a+b+c \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} < \frac{2}{a+b+c}$ 0,5p
Analog obținem: $\frac{1}{b+c} < \frac{2}{a+b+c}$ și $\frac{1}{c+a} < \frac{2}{a+b+c}$ 0,5p

- Prin sumarea inegalităților $\Rightarrow \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} < \frac{6}{a+b+c}$ 0.5p
2. Pp. $AD \parallel BC \Rightarrow BC = AB$; (Fals) $\Rightarrow AD \nparallel BC$ 0.5p
- Fie $\{P\} = AD \cap BC$; luăm $M \in (AB)$ astfel încât $AD = AM \Rightarrow MB = BC$.. 1p
- $\triangle DAM$ – isoscel $\Rightarrow AC$ – mediatoarea lui $DM \Rightarrow CD = CM$ 0.5p
- $\triangle MBC$ – isoscel $\Rightarrow BD$ – mediatoarea lui $CM \Rightarrow DC = DM$ 0.5p
- $\triangle DMC$ – echilateral $\Rightarrow \angle DMC = 60^\circ$ 0.5p
- Din $\triangle ABP \Rightarrow \angle P = 60^\circ$ 1p
- Oficiu 1p

NOTĂ : Orice metodă de rezolvare corectă se punctează.



MINISTERUL EDUCAȚIEI

COLEGIUL NAȚIONAL "MIHAIL SADOVEANU" PAȘCANI

Municipiul Pașcani, Strada Sportului nr. 4, Județul Iași, cod 705200

Telefon / Fax: 0232 762637; contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro

CONCURSUL SPERANȚE OLIMPICE, 12 noiembrie 2022

Subiecte

Clasa a VII a

I.

1. Fie mulțimea $A = \{\frac{2031}{10}, \frac{2032}{11}, \frac{2033}{12}, \dots\}$

Determinați $\text{card}(A \cap \mathbb{N})$.

2. Fie n numere raționale $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$

Știind că $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = a$ și $\frac{1}{x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n} + \frac{2}{x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_n} + \dots + \frac{n}{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1}} = b$

Calculați

$$S = \frac{x_1}{x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n} + \frac{2x_2}{x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_n} + \dots + \frac{nx_n}{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1}}$$

II.

1. Determinați numerele întregi a, b, c pentru care $\frac{a+1}{3} = \frac{b+2}{4} = \frac{5}{c+3}$
2. Determinați numerele întregi nenule x și y pentru care $x + y$ are cea mai mică valoare și $xy + x + y + 1 < 0$.

III.

1. Arătați că, oricare ar fi, numerele a, b, c reprezentând lungimile laturilor unui triunghi, are loc inegalitatea $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} < \frac{6}{a+b+c}$
2. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AB > CD$, AC – bisectoarea $\angle A$, BD – bisectoarea $\angle B$ și $AB = AD + BC$. Aflați măsura unghiului format de dreptele AD și BC .

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte.

Timp de lucru : 2h