



Municipiul Pașcani, Strada Sportului nr.4,
Jud. Iași, cod 705200, Tel/Fax: 0232762637;
contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro



**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
SPERANȚE OLIMPICE**

9 noiembrie 2024

Clasa a VIII a

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I (7 puncte)

1. Avem succesiv $(x - \sqrt{15}y)(x + \sqrt{15}y) = 1 \Rightarrow (x - \sqrt{15}y)^2(x + \sqrt{15}y)^2 = 1$
 $\Rightarrow (x^2 + 15y^2 - 2\sqrt{15}xy)(x^2 + 15y^2 + 2\sqrt{15}xy) = 1 \Leftrightarrow$
 $(x^2 + 15y^2)^2 - 15(2xy)^2 = 1$ 1p

Dacă (x_0, y_0) este soluție, atunci $(x_0^2 + 15y_0^2; 2x_0y_0)$ este soluție. Cum $(4, 1)$ sau $(-4, -1)$ sunt soluții, avem prin recurență o infinitate de soluții.2p

2. Avem $x^2 - 2023x - 2024 = (x + 1)(x - 2024)$ 1p

Ecuția se scrie $(|x + 1| - 2023)(|x - 2024| + 1) = 0$ 1p

Finalizare

$x \in \{-2024, 2022\}$ 1p

Oficiu 1 p

Total 7 p

Subiectul II (7 puncte)

1. Fie $a = n + \sqrt{m}$, $b = -n + \sqrt{m}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$

Avem $2n = m - n^2$, rezultă $m = n^2 + 2n$.

Din $n^2 < m < (n + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$ 2p

Putem lua $a = n + \sqrt{n^2 + 2n}$, $b = -n + \sqrt{n^2 + 2n}$ 1p

2. Avem succesiv

$$\frac{a^5}{a^3 + 1} + \frac{b^5}{b^3 + 1} = \frac{a^5}{a^3 + 1} + \frac{\frac{1}{a^5}}{\frac{1}{a^3} + 1} = \frac{a^5}{a^3 + 1} + \frac{1}{a^2 + a^5} \geq 1$$

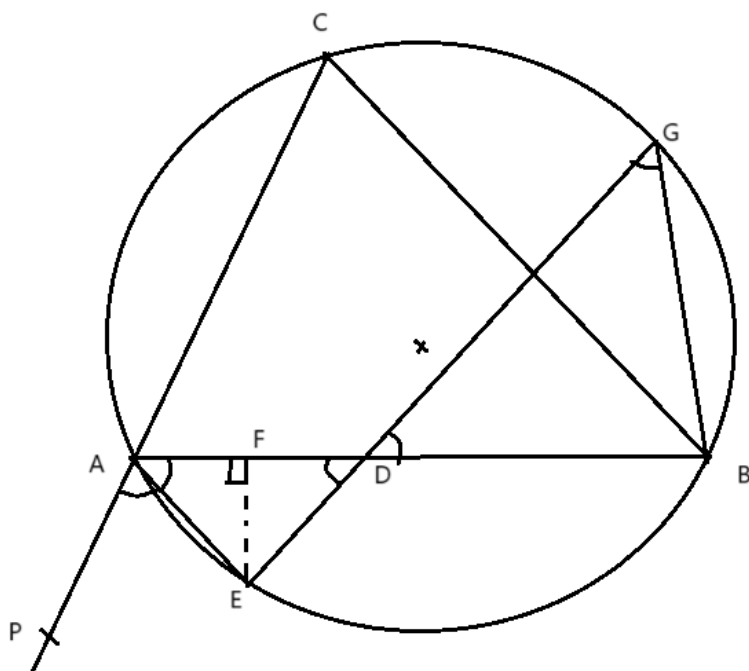
$a^7 + 1 \geq a^5 + a^2 \Leftrightarrow a^7 - a^5 - a^2 + 1 \geq 0$ 2p

Finalizare, avem $(a - 1)^2(a + 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \geq 0$ 1p

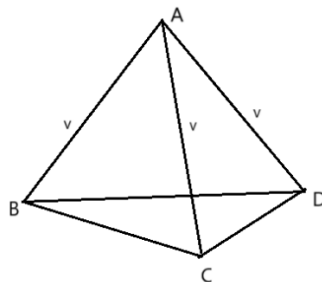
Oficiu 1 p

Total 7 p

Subiectul III (7 puncte)



1. Fie $D \in BF$ astfel încât $AF = FD \Rightarrow AE = ED$. $DE \cap C = \{G\}$ 1p
 Alegem $P \in AC$ astfel încât A se află între P și C.
 $\sphericalangle BGE = \sphericalangle BAE = 1/2 \widehat{EB}$. $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ADE = \sphericalangle BDG \Rightarrow \triangle BDG$ isoscel, deci $BD = BG$.
 $\sphericalangle GEA = 180^\circ - 2\sphericalangle EAD = 180^\circ - \sphericalangle PAD = \sphericalangle BAC$ 1p
 $\Rightarrow \widehat{ACG} = \widehat{BGC} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BG} \Rightarrow AC = BG$ deci $AB - AC = AB - BG = AB - BD = AD = 2AF$1p
2. Oricare trei din punctele date sunt necoliniare, în caz contrar vor exista patru puncte coplanare (contradicție!).....1p
 Fie A, B, C, D, E, F cele 6 puncte. Considerăm segmentele AB, AC, AD, AE, AF, trei dintre acestea vor fi la fel colorate.
 Să considerăm că AB, AC, AD sunt verzi, atunci BC, CD, DB sunt negre, în caz contrar, dacă, să spunem că BC ar fi verde, atunci laturile triunghiului ABC ar fi verzi (analog celelalte posibilități).2p



Total 7 p

Notă: Orice altă soluție corect rezolvată va fi punctată corespunzător