

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
SPERANȚE OLIMPICE

9 noiembrie 2024

Clasa a VII-a

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I (7 puncte)

1. Fie numărul rațional $x = (3\sqrt{3} - \sqrt{26})^{100}$.

a) Demonstrează că $3\sqrt{3} - \sqrt{26} < \frac{1}{8}$.

b) Află primele 90 de zecimale ale numărului x .

Rezolvare și barem

a) Prin calcul se arată că $3\sqrt{3} - \sqrt{26} < \frac{1}{8}$ 1 p

b) $0 < x = (3\sqrt{3} - \sqrt{26})^{100} < \left(\frac{1}{2^3}\right)^{100} = \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{30} = \left(\frac{1}{1024}\right)^{30}$
 $x < \left(\frac{1}{1024}\right)^{30} < \left(\frac{1}{1000}\right)^{30} = \left(\frac{1}{10^3}\right)^{30} = \left(\frac{1}{10}\right)^{90} = (0,1)^{90}$ 1 p
 Deci primele 90 de zecimale ale lui x sunt egale cu 0. 1p

2. Fie $a = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$.

a) Demonstrează că $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}, \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$.

b) Demonstrează că $0,2 < \sqrt{\frac{a}{11}} < 0,3$.

Rezolvare și barem

a) $(n-1)n < n^2 < n(n+1), \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$ de unde rezulta concluzia 1p
 b)

$$\left. \begin{array}{l} n=2 \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} \\ n=3 \Rightarrow \frac{1}{3 \cdot 4} < \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} \\ \dots \\ n=100 \Rightarrow \frac{1}{100 \cdot 101} < \frac{1}{100^2} < \frac{1}{99 \cdot 100} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 101} < a < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{101} < a < \frac{1}{1} - \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{99}{202} < a < \frac{99}{100} \Rightarrow 0,2 < \frac{3}{\sqrt{202}} < \sqrt{\frac{a}{11}} < \frac{3}{10} = 0,3 \dots\dots\dots 1p$$

Oficiu 1p
Total 7 p

Subiectul II (7 puncte)

Se dau mulțimile:

$$A = \left\{ a_n \mid a_n \in \mathbb{Q}, a_n = \frac{n^2 - n + 4}{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 100 \right\} \text{ și}$$

$$B = \left\{ b_n \mid b_n \in \mathbb{Q}, b_n = \frac{n^2 - n + 6}{n^2 + 2}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 100 \right\}.$$

- a) Află $\text{card } A$ și $\text{card } B$.
b) Demonstrează că suma $(\text{card } A)^{4k+2} + (\text{card } B)^{4k}$ este divizibilă cu 5, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

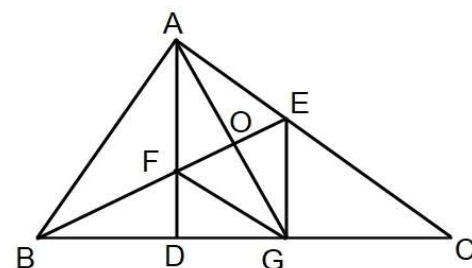
Rezolvare și barem

- a) Fie $1 \leq n_1 < n_2 \leq 100$. Află condițiile în care $a_{n_1} = a_{n_2}$.
 $a_{n_1} = a_{n_2}$ de unde $(n_1 - n_2)(n_1 n_2 - 3n_1 - 3n_2 - 1) = 0$ deci $(n_1 - 3)(n_2 - 3) = 10$
 $(n_1, n_2) \in \{(4, 13), (5, 8), (8, 5), (13, 4)\}$ 1p
Deduce că $a_4 = a_{13}$ și $a_5 = a_8$ de unde $\text{card } A = 98$ 1p
Similar $b_{n_1} = b_{n_2}$ de unde $(n_1 - n_2)(n_1 n_2 - 4n_1 - 4n_2 - 2) = 0$ deci $(n_1 - 4)(n_2 - 4) = 18$
 $(n_1, n_2) \in \{(5, 22), (6, 13), (7, 10), (13, 6), (10, 7), (22, 5)\}$ 1p
Deduce că $b_5 = b_{22}$, $b_6 = b_{13}$ și $b_7 = b_{10}$ de unde $\text{card } B = 97$ 1p
b) $(\text{card } A)^{4k+2} + (\text{card } B)^{4k} = 98^{4k+2} + 97^{4k} = (95 + 3)^{4k+2} + (100 - 3)^{4k}$ 1p
 $= \mathcal{M}_5 + 3^{3k+2} + \mathcal{M}_5 + 3^{4k} = \mathcal{M}_5 + 3^{4k} \cdot 10 : 5$ 1p
Sau
 $u(98^{4k+2}) = 4$ 1p
 $u(97^{4k}) = 1$. Finalizare. 1p

Oficiu 1p
Total 7 p

Subiectul III (7 puncte)

1. Fie triunghiul dreptunghic ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $D \in BC$ și $(BE$ bisectoarea $\sphericalangle ABC$, $E \in AC$, iar $AD \cap BE = \{F\}$.
Dacă $AG \perp BE$, $G \in BC$ arătați că $(GA$ este bisectoarea unghiului FGE .

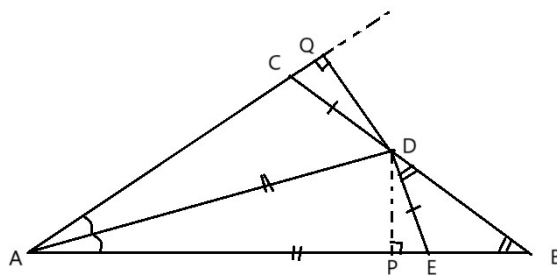


Rezolvare și barem

- $\triangle ABG$: (BO bisectoare, înălțime $\Rightarrow \triangle ABG$ isoscel $\Rightarrow O$ mijlocul $[AG]$) (1) 1p
 $\triangle BAE$ dr. $\sphericalangle AEB = 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$
 $\triangle BDF$ dr. $\sphericalangle BFD = 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle AFE = 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$ 1p
 O mijlocul $[FE]$. (2) 1p
 $AG \perp FE$, $AG \cap FE = \{O\} \xrightarrow{(1)+(2)} \triangle AFGE$ romb $\Rightarrow GA$ este bisectoarea $\sphericalangle FGE$ 1p



2. Fie triunghiul isoscel ABC cu unghiul $\angle BCA = 100^\circ$. Bisectoarea unghiului $\angle CAB$ intersectează BC în D . Arătați că $AB = AD + CD$.



Rezolvare și barem

Fie $E \in (AB)$ astfel încât $AE = AD$.

Unghiul $\widehat{DAB} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{BED} = 100^\circ, \widehat{EBD} = 40^\circ \Rightarrow$

$\widehat{EDB} = 40^\circ \Rightarrow$ triunghiul BED este isoscel $\Leftrightarrow BE = ED$ 1p

Construim $DQ \perp AC, Q \in AC, DP \perp AB, P \in AB, P \in (AD) \Rightarrow DQ = DP \Rightarrow$

$\triangle DPE \cong \triangle DQC \Rightarrow DE = DC = BE \Rightarrow$ 1p

$AB = AE + EB = AD + DC$ 1p

Oficiu 1p

Total 7 p

Notă: Orice altă soluție corect rezolvată va fi punctată corespunzător.