



Municipiul Pașcani, Strada Sportului nr.4,
Jud. Iași, cod 705200, Tel/Fax: 0232762637;
contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „SPERANȚE OLIMPICE”
Ediția a XXII-a, Pașcani 8 noiembrie 2025

BAREM de evaluare și notare
CLASA a VI-a

Subiectul I

(7 puncte)

1) Se consideră numerele $a = 3^{n+1} \cdot 7^n + 4$ și $b = 3^n \cdot 7^{n+1} + 6$, unde n este număr natural.

a) Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .

b) Determinați numărul natural n pentru care cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b este egal cu 91.

a)

$$a = 3^n \cdot 3 \cdot 7^n + 4 = 3 \cdot 21^n + 4 \text{ și } b = 3^n \cdot 7^n \cdot 7 + 6 = 7 \cdot 21^n + 6$$

Fie d , astfel încât $d \mid a$ și $d \mid b \Rightarrow d \mid 7 \cdot (3 \cdot 21^n + 4)$ și $d \mid 3 \cdot (7 \cdot 21^n + 6)$.

$d \mid 21^{n+1} + 28$ și $d \mid 21^{n+1} + 18 \Rightarrow d \mid (21^{n+1} + 28 - 21^{n+1} - 18)$, deci $d \mid 10$

$\Rightarrow d \in \mathcal{D}_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$ 1p

a, b sunt impare $\Rightarrow d \in \{1, 5\}$

Cum $u(a) = u(3 \cdot 21^n + 4) = u(3 + 4) = 7 \Rightarrow d \neq 5 \Rightarrow d = 1$ 1p

b)

$a \cdot b = [a, b] \cdot (a, b)$ și cum $(a, b) = 1$, deducem că $[a, b] = a \cdot b = (3^{n+1} \cdot 7^n + 4) \cdot (3^n \cdot 7^{n+1} + 6) = 91$.

Pentru $n = 0$ obținem că $[a, b] = 7 \cdot 13 = 91$.

Pentru $n > 1 \Rightarrow a \cdot b > 91$ 1p

2) Se consideră a un număr natural care se divide cu 8 și nu se divide cu 16. Arătați că produsul tuturor divizorilor naturali ai numărului a este un pătrat perfect.

Avem $a = 2^3 \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, unde $p_1, p_2, \dots, p_k$ sunt numere prime impare. 1p

Numărul divizorilor naturali ai numărului a este $N = (3 + 1) \cdot (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdots (a_k + 1) \Rightarrow$

$N : 4 \Rightarrow N = 4m, m \in \mathbb{N}$ 1p

Putem grupa divizorii câte doi astfel: d_1 cu $\frac{a}{d_1}$, d_2 cu $\frac{a}{d_2}, \dots, d_r$ cu $\frac{a}{d_r}$, unde $r = \frac{N}{2}$.

Cu această grupare produsul divizorilor va fi $P = (d_1 \cdot \frac{a}{d_1}) \cdot (d_2 \cdot \frac{a}{d_2}) \cdots (d_r \cdot \frac{a}{d_r}) = a^r$, unde

$r = \frac{N}{2} = 2m$, atunci $P = a^{2m} = (a^m)^2$, deci este pătrat perfect 1p

..... 1p Oficiu

Subiectul al II-lea

(7 puncte)

1) Fie mulțimea $A = \{a^3, b^3, c^3, d^3\}$, unde a, b, c, d sunt numere naturale distincte două câte două. Arătați că putem alege o submulțime cu 2 elemente ale mulțimii A , a căror diferență este divizibilă cu 7.

Cubul unui număr natural poate avea doar formele $\mathcal{M}_7, \mathcal{M}_7 + 1$ sau $\mathcal{M}_7 + 6$ 1p

Conform Principiului lui Dirichlet, dintre oricare 4 cuburi de numere naturale cel puțin două dau același rest la împărțirea cu 7, deci diferența lor se divide cu 7. 1p

2) Fie $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}\}$ o mulțime cu 99 de elemente. Cu elementele mulțimii A alcătuim toate sumele posibile de câte două numere distincte. Este posibil ca sumele obținute să fie numere naturale consecutive? Justificați.

Sumele sunt de formele:

$$a_1 + a_2, a_1 + a_3, \dots, a_1 + a_{99}$$

$$a_2 + a_3, \dots, a_2 + a_{99}$$

.....

$$a_{98} + a_{99}$$

În total sunt $98 + 97 + \dots + 1 = 4851$ sume **1p**

Sunt 4851 de sume de două numere distincte, iar toate aceste 4851 sunt numere consecutive.

Fie x numărul numerelor pare și $99 - x$ numărul numerelor impare în A . Din cele 4851 de sume, doar $x(99 - x)$ sunt impare, deoarece o sumă impară poate fi obținută dintr-un număr par și un număr impar. **1p**

Însă cum toate cele 4851 de sume reprezintă numere consecutive, atunci fie 2425 sunt impare, fie 2426. **1p**

În orice caz, ultima cifră a numărului $x(99 - x)$ nu poate fi nici 5, nici 6. Prin urmare, $x(99 - x)$ nu poate fi nici 2425, nici 2426, de unde obținem concluzia. **1p**

..... **1p Oficiu**

Subiectul al III- lea

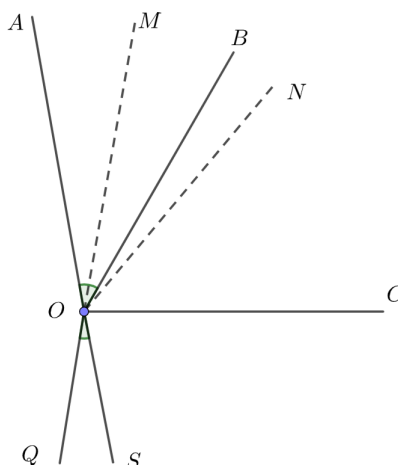
(7 puncte)

1) Unghiurile AOB și AOC sunt neadiacente, cu $\angle AOB < \angle AOC$. Se consideră semidreptele OM și ON , bisectoarele unghiurilor AOB , respectiv AOC , astfel încât $\angle MOC = 80^\circ$ și $\angle MON = 30^\circ$.

a) Să se afle măsurile unghiurilor AOB și BOC .

b) Fie OQ semidreapta opusă semidreptei OM și punctul S situat în interiorul unghiului QOC cu proprietatea că $4 \cdot \angle QOS = \angle SOC$. Arătați că punctele S , O și A sunt coliniare.

a)



$$[OM \text{ bis } \angle AOB \Rightarrow \angle AOM = \angle MOB = \frac{\angle AOB}{2}]$$

$$[ON \text{ bis } \angle AOC \Rightarrow \angle AON = \angle NOC = \frac{\angle AOC}{2}]$$

$$\angle NOC = \angle 50^\circ \Rightarrow \angle AOC = 100^\circ$$

Deducem că $\angle AOM = 20^\circ \Rightarrow \angle AOB = 40^\circ$, deci $\angle BOC = 60^\circ$ **2p**

b)

$$[OQ \text{ este semidreapta opusă lui } OM \Rightarrow \angle QOC + \angle MOC = 180^\circ \Rightarrow \angle QOC = 100^\circ]$$

$\angle QOS + \angle SOC = \angle QOC$, iar $4 \cdot \angle QOS = \angle SOC \Rightarrow 5 \cdot \angle QOS = 100^\circ \Rightarrow \angle QOS = 20^\circ$, $\angle SOC = 80^\circ$.

$\angle SOA = \angle SOC + \angle AOC = 80^\circ + 100^\circ \Rightarrow S, O, A$ coliniare **1p**

2) Pe măsură ce un segment îmbătrânește cu un an el poate pierde un centimetru din lungimea sa sau poate câștiga un centimetru. Un segment are acum lungimea de 2025 cm.

a) Ce lungimi poate avea segmentul peste 4 ani?

b) **Arătați că peste 2024 de ani suma lungimilor posibile pe care le poate avea segmentul este un pătrat perfect.**

a) Peste un an, în 2026 segmentul poate avea 2024 cm sau 2026 cm.

Peste 2 ani, în 2027 segmentul poate avea 2023, 2025 sau 2027 cm.

Peste 3 ani, în 2028 segmentul poate avea 2022, 2024, 2026 sau 2028 cm.

Peste 4 ani, adică în 2029 segmentul poate avea 2021, 2023, 2025, 2027, 2029 cm

..... **1p**

b) Observăm că în anii impari segmentul va avea lungimi impare.

Peste $2k$ ani, k număr natural, adică în anul $2025 + 2k$ (impar) segmentul va avea cea mai mică valoare $2025 - 2k$ și cea mai mare valoare $2025 + 2k$ **1p**

Peste 2024 ani segmentul va avea lungimile 1, 3, 5, $\dots$, 2025, 2027, $\dots$ 4049 cm, deci suma va fi $1 + 3 + 5 + \dots + 4049 = 2025^2$, deci este pătrat perfect. **1p**

..... **1p Oficiu**

- Fiecare subiect este punctat de la 1 punct la 7 puncte
- Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.