

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
SPERANȚE OLIMPICE

8 noiembrie 2025

Clasa a VIII-a

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I (7 puncte)

Oficiu..... 1p

1. Dacă $a, b \in [0, 2]$, arătați că:

a) $a + b - 2 \leq \frac{ab}{2}$

b) $\frac{1}{a+b+1} \leq 1 - \frac{a+b}{3} + \frac{ab}{6}$

Soluție

a) $(2 - a)(2 - b) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 2a - 2b + ab \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq 2a + 2b - 4 \Leftrightarrow$

$\frac{ab}{2} \geq a + b - 2$ 1p

b)

$$\frac{1}{a+b+1} - \left(1 - \frac{a+b}{3}\right) = \frac{3-3(a+b+1)+(a+b+1)(a+b)}{3(a+b+1)} = \frac{3-3(a+b)-3+(a+b)^2+(a+b)}{3(a+b+1)} =$$

$$\frac{(a+b)^2-2(a+b)}{3(a+b+1)} = \frac{(a+b)(a+b-2)}{3(a+b+1)} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{(a+b)(a+b-2)}{3(a+b+1)} = \frac{a+b}{1+a+b} \cdot \frac{a+b-2}{3} \leq \frac{a+b-2}{3} \leq \frac{\frac{ab}{2}}{3} = \frac{ab}{6}$$

Deci, $\frac{1}{a+b+1} - \left(1 - \frac{a+b}{3}\right) \leq \frac{ab}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b+1} \leq 1 - \frac{a+b}{3} + \frac{ab}{6}$ 1p

2.

a) Demonstrați că $7^{2^4} = 48(7^2 + 1)(7^{2^2} + 1)(7^{2^3} + 1) + 1$.

b) Determinați restul împărțirii lui 7^{2^n} prin 2^{n+3} .

c) Arătați că $\left\{\frac{7^2}{2^4}\right\} + \left\{\frac{7^{2^2}}{2^5}\right\} + \left\{\frac{7^{2^3}}{2^6}\right\} + \dots + \left\{\frac{7^{2^n}}{2^{n+3}}\right\} < \frac{1}{8}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

Soluție

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 7^{2^4} &= 7^{2^4} - 1 + 1 = (7^{2^3})^2 - 1 + 1 = (7^{2^3} - 1)(7^{2^3} + 1) + 1 = (7^{2^2} - 1)(7^{2^2} + 1)(7^{2^3} + 1) + 1 = \\ &= (7^2 - 1)(7^2 + 1)(7^{2^2} + 1)(7^{2^3} + 1) + 1 = \\ &= 48(7^2 + 1)(7^{2^2} + 1)(7^{2^3} + 1) + 1 \dots\dots\dots 1\text{p} \end{aligned}$$

b) La fel ca și la a) obținem

$$7^{2^n} = 7^{2^n} - 1 + 1 = (7 - 1)(7 + 1)(7^2 + 1)(7^{2^2} + 1) \dots (7^{2^{n-1}} + 1) + 1$$

Fiecare din cei $n - 1$ factori de forma $7^{2^{k-1}} + 1, k \in \{2, 3, \dots, n\}$ este divizibil cu 2 pentru că $7^{2^{k-1}}$ este impar.

$$7^{2^n} = 2 \cdot 2^3 \cdot 2^{n-1} \cdot q_n + 1 = 2^{n+3} \cdot q_n + 1, q_n \in \mathbb{N}.$$

Deci, rezultatul căutat este 1 1p

$$\text{c)} \quad \frac{7^{2^k}}{2^{k+3}} = \frac{2^{k+3} \cdot q_{k+1}}{2^{k+3}} = q_k + \frac{1}{2^{k+3}} \Rightarrow \left\{\frac{7^{2^k}}{2^{k+3}}\right\} = \frac{1}{2^{k+3}}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Deci,

$$S = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \frac{1}{2^3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) < \frac{1}{8} \dots\dots\dots 1\text{p}$$



Subiectul II (7 puncte)

Oficiu..... 1p

1. Fie mulțimea $A = \{x \in [0, \infty) / \sqrt{4x+1} + 4\sqrt{x} + \sqrt{4x+1-4\sqrt{x}} = 2\}$.
Aflați mulțimea A.

Soluție

$$\sqrt{4x+1} + 4\sqrt{x} = \sqrt{(2\sqrt{x}+1)^2} = |2\sqrt{x}+1| = 2\sqrt{x}+1$$

$$\sqrt{4x+1-4\sqrt{x}} = \sqrt{(2\sqrt{x}-1)^2} = |2\sqrt{x}-1| = \begin{cases} 2\sqrt{x}-1, x \geq \frac{1}{4} \\ 1-2\sqrt{x}, x \in [0, \frac{1}{4}] \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$$x \geq \frac{1}{4} \stackrel{ip}{\Rightarrow} 2\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}-1=2 \Rightarrow 4\sqrt{x}=2 \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{4} \in \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$$

$$x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \stackrel{ip}{\Rightarrow} 2\sqrt{x}+1+1-2\sqrt{x}=2, \forall x \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$$

Deci, $A = \left[0, \frac{1}{4}\right]$ 1p

2. Fie numerele reale a, b, c astfel încât $a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 6a + 4b - 12c + 18 = 0$.
a) Verificați dacă $(2b+1)^2 + (2c-3)^2 = 4b^2 + 4c^2 + 4b - 12c + 10$.
b) Arătați că $a < b < c$.
c) Găsiți $\max(a+b+c)$.

Soluție

a) Calcul direct 1p

b)

$$(a+3)^2 + (2b+1)^2 + (2c-3)^2 = 1$$

$$\text{Avem } (a+3)^2 \leq 1, (2b+1)^2 \leq 1, (2c-3)^2 \leq 1$$

Se obține $a \in [-4, -2], b \in [-1, 0], c \in [1, 2]$. Așadar $a < b < c$ 1p

c)

$$\text{Notăm } a+3=x \Rightarrow a=x-3, 2b+1=y \Rightarrow b=\frac{y-1}{2}, 2c-3=z \Rightarrow c=\frac{z+3}{2}$$

$$\text{Revenind în relația dată obținem } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (1)$$

$$a+b+c = x-3 + \frac{y-1}{2} + \frac{z+3}{2} = \frac{2x+y+z-4}{2}$$

$$\text{Aplicând inegalitatea C.B.S. avem } (2x+y+z)^2 \leq (4+1+1)(x^2+y^2+z^2) = 6$$

$$2x+y+z \leq \sqrt{6} \Rightarrow a+b+c \leq \frac{\sqrt{6}-4}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Egalitate pentru } \frac{2}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = k \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{6}{k^2} = 1 \Rightarrow k = \pm\sqrt{6} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{6}, y = \frac{\sqrt{6}}{6}, z = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow$$

$$a = \frac{2\sqrt{6}-18}{6}, b = \frac{\sqrt{6}-6}{12}, c = \frac{\sqrt{6}+18}{12}$$

$$\max(a+b+c) = \frac{\sqrt{6}}{2} - 2 \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul III (7 puncte)

Oficiu..... 1p

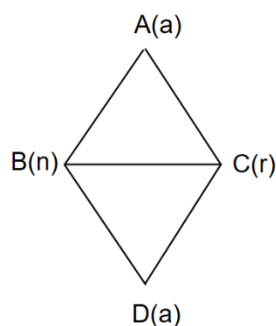
1. Punctele unui plan sunt colorate cu trei culori. Demonstrați că există două puncte la distanța 1, având aceeași culoare.

Soluție

Fie triunghiurile echilaterale ABC și BCD de latură 1, ele determină rombul $ABCD$.

Folosim culorile albastru (a), negru (n), roșu (r).

Dacă avem colorarea $A(a)$, $B(n)$, $C(r)$ atunci $D(a)$.



..... 1p

Rotim figura $ABCD$ în jurul lui A , punctul D descrie un cerc format numai din puncte albastre de rază $AD = \sqrt{3} > 1$

Acest cerc conține o coardă de lungime 1 cu capetele colorate în albastru 1p

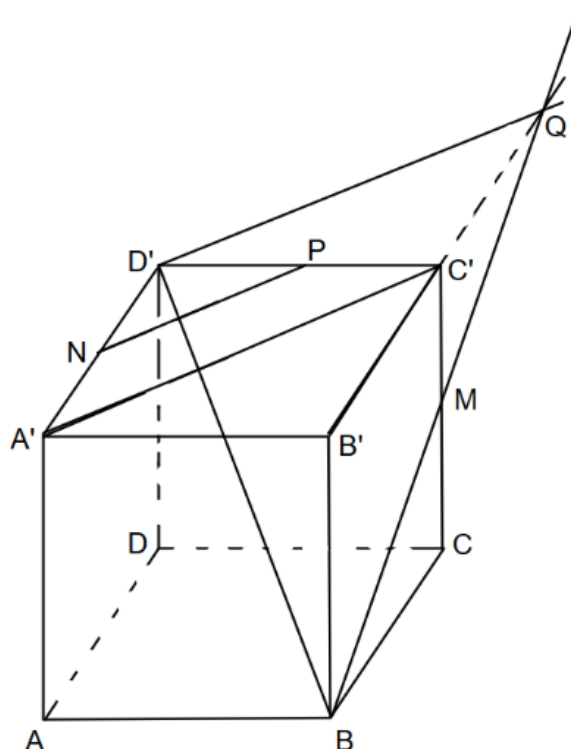


Municipiul Pașcani, Strada Sportului nr.4,
Jud. Iași, cod 705200, Tel/Fax: 0232762637;
contact@liceu.colegiulsadoveanu.ro



2. În cubul ABCDA'B'C'D', punctele M, N, respectiv P sunt mijloacele muchiilor CC', A'D', respectiv C'D'. Aflați sinusul unghiului format de dreptele BM și NP.

Soluție



not

Fi e $BM \cap B'C' = \{Q\}, AB = a, C'M$ - l.m în $\Delta BB'Q \Rightarrow B'C' = C'Q = a$

$C'Q \parallel A'D', C'Q = A'D' \Rightarrow A'C'QD'$ - paralelogram..... 1p

$$\Rightarrow D'O = A'C' = a\sqrt{2}$$
$$NP \parallel A'C' \Rightarrow NP \parallel D'Q \Rightarrow \sphericalangle(BM, NP) = \sphericalangle(BQ, D'Q) \dots\dots\dots 1p$$
$$\Delta BQD': D'Q = a\sqrt{2}, BQ = a\sqrt{5}, D'B = a\sqrt{3}$$
$$D'Q^2 + D'B^2 = 2a^2 + 3a^2 = 5a^2 = BQ^2 \xrightarrow{R.T.P.} \Delta BQD' - \text{dreptunghic în } D' \dots\dots\dots 1p$$
$$\sin(\widehat{BQD'}) = \frac{D'B}{BQ} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \dots\dots\dots 1p$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru: 120 minute

Timp de acomodare subiect: 30 minute

Fiecare subiect este punctat de la 1 punct -7 puncte