

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
SPERANȚE OLIMPICE

8 noiembrie 2025

Clasa a VII-a

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I (7 puncte)

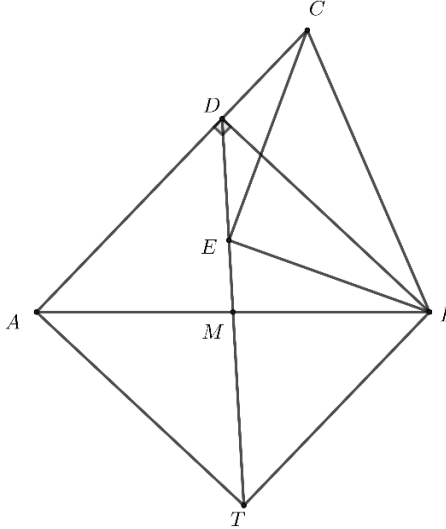
	Oficiu	1p
1.	$\sqrt{2024 \cdot 2025} < 2025$	1p
	$\sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2024 \cdot 2025}}} <$	1p
	$\sqrt{2024 \cdot 2025 + \sqrt{2024 \cdot 2025 + 2025}} = \sqrt{2024 \cdot 2025 + 2025} = 2025$	1p
		1p
2.	$2^{\overline{xy}} = \overline{ab}^2 + 127 \Rightarrow 2^{\overline{xy}} \leq 99^2 + 127 \Rightarrow 2^{\overline{xy}} \leq 9928$	1p
	Prin urmare $\overline{xy} \in \{10, 11, 12, 13\}$.	1p
	Cazurile $\overline{xy} \in \{10, 11, 13\}$ nu conduc la pătrate perfecte.	1p
	Dacă $\overline{xy} = 12 \Rightarrow 4096 - 127 = 3969 = 63^2$, deci $\overline{ab} = 63$	1p

Subiectul II (7 puncte)

	Oficiu	1p
1.	Presupunem că există numerele prime a, b , cu $a < b$ astfel încât $2^{2026} + 1 = a + b$.	1p
	Cum $2^{2026} + 1$ este impar, deducem că $a = 2$, deci $b = 2^{2026} - 1$.	1p
	Cum $2^{2026} - 1 = (3 - 1)^{2026} - 1 = M_3 + 1 - 1 = M_3 > 3 \Rightarrow b$ este compus, de unde rezultă că presupunerea făcută este falsă.	1p
2.	$\frac{p+n}{q \cdot n} \in \mathbb{N}$, deci există numărul x pentru care $p + n = x \cdot q \cdot n$, de unde rezultă că $n p$.	1p
	$\frac{q+n}{p \cdot n} \in \mathbb{N}$, deci există numărul y pentru care $q + n = y \cdot p \cdot n$, de unde rezultă că $n q$.	
	Prin urmare $n (p, q)$.	
	- Dacă $p \neq q$, $(p, q) = 1$, de unde $n = 1$. Deci $\frac{p+1}{q} \in \mathbb{N}$ și $\frac{q+1}{p} \in \mathbb{N}$ de unde rezultă $p + 1 \geq q$, $q + 1 \geq p$ Prin urmare $q \leq p + 1 \leq q + 2$ - Dacă $p + 1 = q \Rightarrow p = 2, q = 3$; - Dacă $p + 1 = q + 1 \Rightarrow p = q$, caz care nu convine; - Dacă $p + 1 = q + 2 \Rightarrow p = 3, q = 2$. - Dacă $p = q$, $(p, q) = p = q$, de unde $n = p = q$. $\frac{2p}{p^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow p 2$. Cum p este prim, obținem că $n = p = q = 2$.	
		1p



Subiectul III (7 puncte)

	Oficiu	1p
1.	Fie $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ lungimile celor 12 segmente. Fără a restrânge generalitatea, considerăm $1 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{12} < 144.$ Presupunem prin reducere la absurd că nu se poate construi un triunghi cu oricare trei dintre cele 12 segmente. Atunci: $\begin{aligned} a_3 &\geq a_2 + a_1 > 2 \\ a_4 &\geq a_3 + a_2 > 3 \\ a_5 &\geq a_4 + a_3 > 5 \\ a_6 &\geq a_5 + a_4 > 8 \\ a_7 &\geq a_6 + a_5 > 13 \\ a_8 &\geq a_7 + a_6 > 21 \\ a_9 &\geq a_8 + a_7 > 34 \\ a_{10} &\geq a_9 + a_8 > 55 \\ a_{11} &\geq a_{10} + a_9 > 89 \\ a_{12} &\geq a_{11} + a_{10} > 144 \end{aligned}$ Deci $a_{12} > 144$, contradicție. Deci există 3 segmente printre cele 12 care pot fi lungimile laturilor unui triunghi.	1p 1p 1p
2.	 Construim dreptunghiul $ADBT$. Cum M este mijlocul lui AB, este și mijlocul lui TD, deci $M \in TD$. Cum $AB = TD \Rightarrow TD = AC$, deci $TE = AD = TB$, de unde rezultă că $\triangle TBE$ este isoscel cu baza $[BE]$. Notăm $\angle DCE = x^\circ$, deci $\angle DEC = x^\circ$, $\angle EDC = 180^\circ - 2x^\circ \Rightarrow$ $\angle MDA = 2x^\circ = \angle MAD = \angle BTE$. Cum $\triangle TBE$ este isoscel cu baza $[BE] \Rightarrow \angle TEB = 90^\circ - x$. Avem că $\angle BEC = 180^\circ - (x + 90^\circ - x) = 90^\circ \Rightarrow BE \perp EC$, deci $\angle BEC$ este drept. (G.M.B. 2022)	1p 1p 1p