

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
SPERANȚE OLIMPICE

8 noiembrie 2025

Clasa a V-a

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I (7 puncte)

a) Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care

$$\overline{ab} + \overline{ba} + a + b = 47 + 2^c.$$

Soluție.

Folosind scrierea zecimală avem $10a + b + 10b + a + a + b = 47 + 2^c$, adică $12(a + b) = 47 + 2^c$ **1p**

Deducem de aici că $47 + 2^c$ trebuie să fie un număr par, adică 2^c impar .

Prin urmare obținem $c = 0$ **1p**

Atunci $12(a + b) = 48$ sau $a + b = 4$, cum $a \neq 0$ și $b \neq 0$ rezultă $a = 1, b = 3$,
 $a = 3, b = 1$ sau $a = 2, b = 2$ **1p**

Numerele sunt 130, 310 și 220..... **1p**

b) Arătați că nu există numere naturale care împărțite la 6 dau restul 4 și împărțite la 9 dau restul 3.

Soluție.

$n = 6c_1 + 4$ și $n = 9c_2 + 3$ **1p**

$6c_1 + 4 = 9c_2 + 3 \Rightarrow 4 = 9c_2 + 3 - 6c_1 \Rightarrow 4 = 3(3c_2 + 1 - 2c_1)$ imposibil, deci
nu există numere naturale care îndeplinesc condițiile problemei..... **1p**

Oficiu..... **1p**

Subiectul II (7 puncte)

a) Arătați că $36^2 + 3^6$ este pătrat perfect.

Soluție.

$36^2 + 3^6 = (6^2)^2 + 3^6 = 6^4 + 3^6 = 3^4 \cdot 2^4 + 3^6$ **1p**

$36^2 + 3^6 = 3^4 \cdot (2^4 + 3^2) = 3^4 \cdot 25 = 45^2$ pătrat perfect..... **1p**

b) Demonstrați că ecuația $a^4 + b^3 = c^2$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor naturale.

Soluție.

Deoarece $6^4 + 9^3 = 45^2$, alegem $a = 6m^3, b = 9m^4, c = 45m^6, m \in \mathbb{N}^*$ **2p**

Rezultă $a^4 + b^3 = 6^4 \cdot m^{12} + 9^3 \cdot m^{12}$ **1p**

$m^{12}(6^4 + 9^3) = m^{12} \cdot 45^2 = (45m^6)^2 = c^2$ **1p**

Oficiu..... **1p**



Subiectul III (7 puncte)

- a) Bunicul are 7 nepoți: Andrei, Bogdan, Costin, Dan, Emil, Florin și Gabriel. Vârsta bunicului este de 74 de ani și este egală cu suma vârstelor nepoților săi. Vârstele lui Andrei, Bogdan, Costin, Dan, Emil și Florin sunt numere pare consecutive, iar Gabriel are un frate geamăn. Câți ani are Gabriel și cum se numește fratele său geamăn?

Soluție.

Notăm vârsta lui Andrei cu $2x$. Atunci, vârstele lui Bogdan, Costin, Dan, Emil și Florin sunt: $2x + 2, 2x + 4, 2x + 6, 2x + 8$ și $2x + 10$. Vârsta lui Gabriel este $2x + 2y$, unde $y \in \{0,1,2,3,4,5\}$ **1p**

Avem relația: $2x + (2x + 2) + (2x + 4) + (2x + 6) + (2x + 8) + (2x + 10) + (2x + 2y) = 74$, care este echivalentă cu $7x = 22 - y$. Singura valoare a lui $y \in \{0,1,2,3,4,5\}$ pentru care $22 - y$ se împarte la 7 este $y = 1$ **1p**

Se obține $x = 3$. Așadar, Gabriel are 8 ani, iar vârstele celorlalți nepoți, sunt, în ordine: 6,8,10,12,14, respectiv 16 ani. Fratele geamăn al lui Gabriel este Bogdan..... **1p**

- b) Demonstrați că, pentru orice număr natural n , numărul $2024^n + n^{2024} + 2$ nu este pătrat perfect.

Soluție.

Fie $N = 2024^n + n^{2024} + 2$.

Dacă n este un număr par, atunci există numerele naturale nenule t și u pentru care $n^{2024} = 4t$ și $2024^n = 4u$ **1p**

Atunci $N = 4t + 4u + 2$, deci există numărul natural nenul v pentru care $N = 4v + 2$, ceea ce implică faptul că N nu poate fi un pătrat perfect..... **1p**
sau $N =$

Dacă n este un număr impar, atunci N este de forma $4k + 3$, k număr natural nenul ceea ce implică faptul că acesta nu poate fi un pătrat perfect. **1p**

Oficiu..... **1p**